U.E "NUESTRA SEÑORA DE LOURDES"
Inscrita en M.P.P.E S0136D0302
Dirección: Urb. Caribe AV. Principal, Puerto La Cruz, Edo. Anzoátegui
Teléfonos (0281) 2694126 – 2688353, fax 2699502

Matemática
4to Año
III Lapso

HORARIO DE CONSULTAS: De lunes a viernes
CORREO: adalysblanco.18@gmail.com
LLAMADAS: 04262868735 Martes y jueves de 2:00 pm a 4:00 pm.

Unidad De Aprendizaje (Identidades Para El Doble De Un Ángulo)

INTRODUCCIÓN: En nuestros tiempos de avances tecnológicos es necesario y casi prioritario el uso de cálculos y funciones que a pesar que fueron creadas hace mucho tiempo siempre van a ser información y material de importancia en el moderno mundo de hoy. Las razones trigonométricas del ángulo doble se deducen fácilmente de las razones trigonométricas del ángulo suma. Las cuales se presentan a continuación:

1. Sen 2x = 2 senx.cosx
2. a) $\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$
   b) $\cos 2x = 1 - 2\,\text{sen}^2 x$
   c) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
3. $\text{sen}^2\, x = \frac{\quad}{\quad}$
4. $\cos^2\, x = \frac{\quad}{\quad}$
5. $\text{tag}\; 2x = \frac{\quad}{\quad}$
6. $\text{tag}^2\, x = \frac{\quad}{\quad}$

Ejemplo 1: Si alfa α es un ángulo en el segundo cuadrante tal que cos α = $-\frac{5}{13}$ determinar:

a) Sen 2 α b) cos 2 α c) tag 2 α

Solución a): Para calcular sen 2α usamos la relación sen 2α = 2senα.cosα

Determinaremos primero senα a través de la identidad fundamental sen$^2\alpha$ + cos$^2\alpha$ = 1. Como cosα = $-\frac{5}{13}$ se tendrá al sustituir que:

$\text{sen}^2\alpha + \left(-\frac{5}{13}\right)^2 = 1$

$\text{sen}^2\alpha + \frac{25}{169} = 1$ ➔ Elevando el paréntesis al cuadrado

$\text{sen}^2\alpha = 1 - \frac{25}{169}$ ➔ Despejando sen^2 α

$\text{sen}^2\alpha = \frac{169-25}{169} = \frac{144}{169}$ ➔ Operando en el segundo miembro

$\text{sen}\alpha = \pm\sqrt{\frac{144}{169}} = \pm\frac{12}{13}$ ➔ Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros

Debido a que alfa está en el segundo cuadrante y en éste el seno es positivo se rechaza el valor negativo, tomándose el valor positivo. Luego **senα = $\frac{12}{13}$**

Finalmente, sustituyendo los valores en la expresión Sen 2α = 2 senα.cosα se tendría que:

Sen 2α = 2. $\frac{12}{13}$. $\left(-\frac{5}{13}\right)$ ➔ **Sen 2α = $-\frac{120}{169}$**

b) Determinemos cos 2α

Usamos la relación cos 2α = cos^2 α – sen^2 α. Sustituyendo coseno de alfa y seno de alfa por sus valores nos queda:

cos 2α = $\left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2$ ➔ cos 2α = $\frac{25}{169} - \frac{144}{169}$ ➔ **cos 2α = - $\frac{119}{169}$**

c) Determinemos tag 2α

Usaremos la relación tag2α = $\frac{2\,tag\,\alpha}{1-tag^2\,2\alpha}$

Para determinar tag 2α debemos obtener tagα a través de la relación tagα = $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}$. Sustituyendo seno de alfa y coseno de alfa por sus valores se tiene que:

tagα = $\frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}}$ ➔ **tagα = $-\frac{12}{5}$**

Ahora sustituyendo este valor en la expresión tag2α = $\frac{2\,tag\,\alpha}{1-tag^2\,2\alpha}$ nos queda que:

$\text{tag}2\alpha = \frac{2.(-\frac{12}{5})}{1-(-\frac{12}{5})^2} = \frac{-\frac{24}{5}}{1-\frac{144}{25}} = \frac{-\frac{24}{5}}{\frac{25-144}{25}} = \frac{-\frac{24}{5}}{\frac{-119}{25}} = \frac{120}{119}$

$\text{tag}2\alpha = \frac{120}{119}$

Ejemplo 2: Verificar la siguiente identidad cot A = $\frac{1+\cos 2A}{sen\ 2A}$

Iniciemos desde el segundo miembro para llegar al primero

$\frac{1+\cos 2A}{sen\ 2A} = \frac{1+(2\cos^2 A-1)}{2sen\ A.\cos A} = \frac{1-1+2\cos^2 A}{2sen\ A.\cos A} = \frac{2\cos^2 A}{2sen\ A.\cos A} = \frac{\cos A}{sen\ A}$ = **cot A**

VÍDEOS DE REFERENCIA: https://www.youtube.com/watch?v=sOfb8x5_9jM

Actividad I

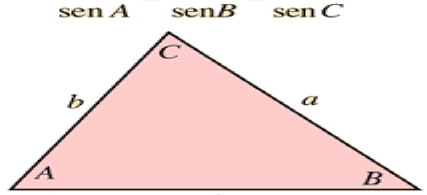
1. Si A está en el cuarto cuadrante y sabemos que sen A = $-\frac{24}{25}$. Determinar sen 2ª
2. Dado sen θ = $-\frac{3}{5}$ y $\pi < \theta < 3\pi/2$. Determinar: a) sen 2θ; b) cos 2θ; c) tag 2θ
3. Verifica las siguientes identidades:
   a) (sen A + cos A)^2 = 1 + sen 2A b) 2cos^2 x = cot x.sen 2x
4. Si cos 2β = $-\frac{3}{5}$ y $90° < \beta < 180°$. Evaluar a) sen β; b) cos β; c) cot β.

Unidad De Aprendizaje (Teorema Del Seno O Ley De Los Senos)

INTRODUCCIÓN: Anteriormente hemos estudiado la resolución de triángulos rectángulos. Ahora analizaremos los triángulos que no contienen ángulos rectos y a los cuales llamamos triángulos oblicuángulos o triángulos oblicuos.

Para resolver esta clase de triángulos es necesario derivar algunas propiedades, una de las cuales es llamada **Ley de los senos,** la cual establece que en todo triángulo oblicuo se cumple que las longitudes de los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, es decir:

$$\frac{a}{\text{sen}\,A} = \frac{b}{\text{sen}\,B} = \frac{c}{\text{sen}\,C}$$

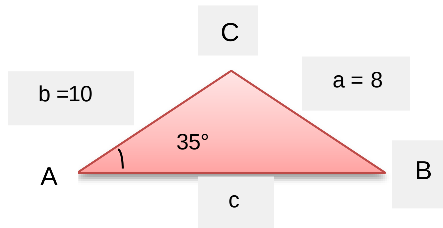


El teorema de los senos permite resolver aquellos triángulos en los que son conocidos:

- Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (LLA)

- Dos ángulos y un lado (AAL)

<u>Ejemplo 1</u>: Resolución de un triángulo oblicuángulo conociendo dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.



Observemos el triángulo de la derecha, como son conocidos dos lados, a = 8 y b = 10. También se conoce el ángulo opuesto a uno de ellos, es decir, el ángulo en el vértice A, <A = 35°.

Debemos encontrar el valor del ángulo B, para ello usamos la relación:

$\frac{a}{sen\ A} = \frac{b}{sen\ B}$ ➔ Sustituyendo los valores $\frac{8}{sen 35°} = \frac{10}{sen\ B}$ ➔ Despejando sen B

➔ sen B = $\frac{10.sen\ 35°}{8}$ ➔ sen B = 0,716970545 ➔ **sen B = 45°48'18"**

Determinemos el ángulo C: por la suma de dos ángulos internos de un triángulo sabemos que: C + B + 35° = 180°, despejando C se tiene que:

C = 180° - (35° + B)

C = 180° - (35° + 45°48'18")

C = 180° - 80°48'18" ➔ **C = 99°11'42"**

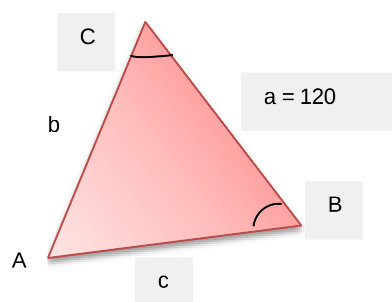
Determinemos la longitud del lado c: usamos la relación $\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$, sustituyendo los valores de a, A y C por sus valores se tiene que:

$\frac{8}{sen\ 35°} = \frac{c}{sen\ 99°11'24"}$ ➔ Despejando c ➔ c = $\frac{8.sen\ 99°11'42"}{sen\ 35°}$ ➔ **c = 13,77**

Ejemplo 2: Resolución de un triángulo conociendo dos ángulos y un lado.

Resolver el triángulo que se muestra en la siguiente figura. En él se dan dos ángulos, B y C, así como también la longitud del lado a.

B = 28° C = 45°20' a = 120



Determinemos el ángulo A

Para encontrar el valor del ángulo A se procede así:

A = 180° - (B + C)

A = 180° - (28° + 45°20')

A = 180° - 73° 20'

A = 106°40'

Determinemos la longitud del lado c

Usemos la relación siguiente: $\frac{a}{senA} = \frac{c}{senC}$ y despejando c, se tiene c = $\frac{a.senC}{senA}$

Sustituyendo los valores, c = $\frac{120.sen45°20'}{sen106°40'}$ ➔ **c = 89,09**

Indagar sobre el caso ambiguo (LLA)

VÍDEO DE REFERENCIA:

- https://www.youtube.com/watch?v=e2_WDo5yK_Q
- https://www.youtube.com/watch?v=nCK3jKq_Iyk
- https://www.youtube.com/watch?v=blOkYHt7fJE

Actividad II

- En cada uno de los ejercicios resuelve el triángulo ABC

1. b = 18 B = 30° A = 133°
2. B = 38° C = 21° b = 24
3. A = 36° a = 24 b = 34
4. C = 61°10’ c = 30,3 b = 24, 2
5. En un triángulo cualquiera se da un lado a = 4,6 y el valor del ángulo opuesto igual a 45°. Calcular la longitud del lado b sabiendo que el ángulo opuesto a él es igual a 60°.
6. En un triángulo ABC, la medida del lado a = 20cm. Hallar la longitud del lado b sabiendo que los ángulos en los vértices son A = 45° y B = 60°

Unidad De Aprendizaje (Teorema Del Coseno O Ley Del coseno)

INTRODUCCIÓN: La ley del coseno se puede considerar como una extensión del teorema de Pitágoras aplicable a todos los triángulos. En la ley de los senos hemos resuelto triángulos en los cuales conocíamos un lado y dos ángulos o dos lados y un ángulo que no fuera el comprendido entre ellos.

La ley del coseno establece lo siguiente: en cualquier triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de éstos por el coseno del ángulo que forman.

$$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A}$$

$$\mathbf{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B}$$

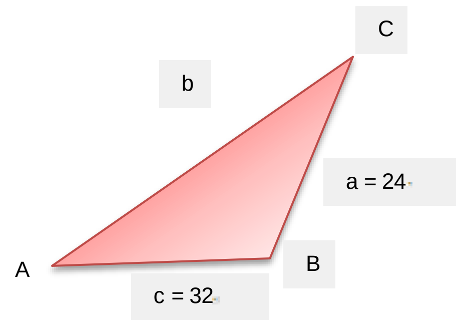
$$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C}$$

El teorema del coseno permite resolver triángulos cuando se conocen:

- Dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos
- Los tres lados

Ejemplo 1: Resolución de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido entre ellos.

En el triángulo ABC de la derecha se tiene que
$a = 24$, $c = 32$ y el ángulo en el vértice $B = 115°$. Resolver el triángulo.



Solución: calculemos el lado b a través de la relación $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$b^2 = (24)^2 + (32)^2 - 2.24.32.\cos 115°$ ➔ Sustituyendo los valores

$b^2 = 2249{,}14165$ ➔ Efectuando operaciones con la calculadora

b = 47,4 ➔ Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros

Ejemplo 2: Resolución del triángulo conocidos los tres lados

Sea el triángulo ABC, donde $a = 18$, $b = 25$ y $c = 12$. Resolver el triángulo

Solución: Calculemos el ángulo en el vértice B a través de la relación $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

Despejando cosB, resulta $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ➔ $\cos B = \frac{18^2+12^2-25^2}{2.18.12}$ ➔ $\cos B = -\frac{157}{432}$

➔ $\cos B = -0{,}363425925$ ➔ **cosB = 110°18’38”**

Análogamente se hace para calcular los ángulos de los vértices A y C.

VÍDEOS DE REFERENCIA:

- https://www.youtube.com/watch?v=65RP6V0hsy4
- https://www.youtube.com/watch?v=x4sCCs5q8aA
- https://www.youtube.com/watch?v=cCeJffSwHvc

Actividad III

- Resolver cada uno de los siguientes triángulos:

1. A = 30°   b = 12   c = 24
2. B = 72°40’   c = 16   a = 78
3. a = 12   b = 14   c= 20
4. a = 3,3   b = 2,7   c = 2,8
5. C = 116°24’   a = 11,2   b = 15,3
6. En un triángulo ABC, los lados miden a = 3cm, b = 5cm y c = 6cm. Calcular los tres ángulos.

Unidad De Aprendizaje (Funciones Trigonométricas)

INTRODUCCIÓN: Las gráficas de las funciones trigonométricas poseen propiedades matemáticas muy interesantes como máximo, mínimo, asíntotas verticales, alcance y periodo entre otras. Es necesario estudiar la forma de la gráfica de cada función trigonométrica. Esta forma está asociada a las características particulares de cada función.Éstas son útiles porque pueden tomar información complicada y desplegarla de una manera fácil de leer. A continuación se estudiará la función seno, coseno y tangente.

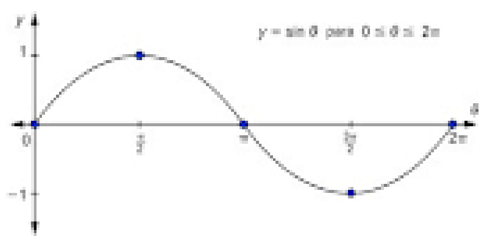
- **Función Seno**: es la función real de variable real tal que a cada ángulo alfa, expresado en radianes, se le hace corresponder un número real obtenido como seno de alfa. Es decir:

Senx : R → R tal que sen(α) = y. Esto significa que, **a cada número real** α le asignamos otro **número real** llamado **sen** α, de tal manera que:

- El conjunto de partida es igual al dominio de la función seno
- El codominio de la función es el conjunto de los números reales
- El rango o conjunto de imágenes es el intervalo $-1, 1$
- Cada número real del dominio tiene una única imagen en el codominio

Gráfica de la función seno: La función seno es de la forma f(x) = sen x. Es fácil formar una tabla de valores, para ello basta con introducir en la calculadora un ángulo en grados o en radianes y pulsar la tecla sen o sin. Para tratar de representar la función seno formamos una tabla de valores, dándole valores a x preferiblemente en radianes, comprobando con la calculadora científica estos valores redondeados a dos decimales, y luego trazar la gráfica.

Ver imagen mas clara en:
https://www.varsitytutors.com/assets/vt-hotmath-legacy/hotmath_help/spanish/topics/graphing-sine-function/sine-graph-spanish.gif



Propiedades o características de la función seno: A partir de la gráfica de la función seno es posible observar las siguientes características:

- Es periódica de periodo 2π, ya que sen(x + 2π) = sen x. Esto significa que desde x = 2π comienzan a repetirse los valores de sen x, iniciando la curva un nuevo ciclo que se repite cada 2π radianes.

- Es impar, ya que sen (-x) = - senx. Esta condición la cumplen las funciones impares cuando se verifica que f(x) = -f(x). Esto también nos indica la simetría respecto al origen.
- No es inyectiva
- No es sobreyectiva

❖ **<u>Función Coseno:</u>** es una función real de variable real, tal que a cada ángulo alfa medido en radianes se le hace corresponder un número real denotado cos de alfa. Es decir:

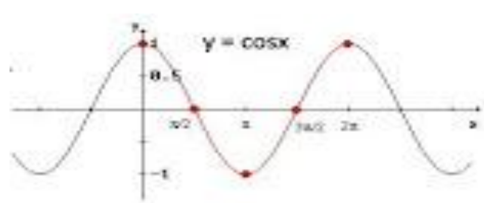
cos: R → R tal que cos α = y. Esto significa que a cada número real alfa le asignamos otro número real llamado cos α, de tal manera que:

- El conjunto de partida R es igual al dominio de la función coseno
- El codominio de la función es el conjunto de los números reales
- El rango o conjunto de imágenes es el intervalo $-1, 1$
- Cada número real del dominio tiene una única imagen en el codominio

<u>Gráfica de la función coseno</u>: La función coseno es de la forma f(x) = cos x. Todas las calculadoras científicas incorporan esta función, por eso es muy fácil formar una tabla de valores; basta con introducir un ángulo en radianes y pulsar la tecla cos, y el valor que aparece en pantalla es el coseno del ángulo que hemos introducido.

Ver imagen en:

https://matematizando639403200.files.wordpress.com/2018/04/041418_1650_funcionestr1.gif?w=300



<u>Propiedades o características de la función coseno:</u>

- Es periódica de periodo 2π, ya que cos (x + 2π) = cosx. Esto significa que desde x = 2π comienzan a repetirse los valores de cos x, iniciando la curva un nuevo ciclo que se repite cada 2π
- Es par, ya que cos(- x) = cos x, condición que cumplen las funciones paraes cuando se verifica que f(-x) = f(x). Esto también nos indica que es simétrica respecto al eje de ordenadas.
- No es inyectiva
- No es sobreyactiva
- El máximo es 1 y lo alcanza en x 0 0. El valor minimo es – 1 y lo alcanza en x = π
- El dominio es el conjunto de los números reales
- El recorrido es el intervalo $-1, 1$

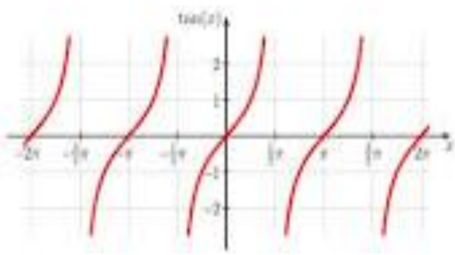
- Es continua en todo su dominio

❖ **Función Tangente:** es la función de variable real definida como el cociente; f(x) = $\frac{senx}{cosx}$, siendo cos x distinto de cero, denotado por f(x) = tag x, de forma tal que a cada ángulo, expresado en radianes, le haga corresponder el valor de su tangente.

A diferencia de las funciones seno y coseno, la función tangente no existe para cualquier número real x, es decir, no está definida para valores x tales que cos x = 0. Ello ocurre cuando x es un número impar de veces π/2.

Gráfica de la función tangente:

Ver imagen en:
https://www.varsitytutors.com/assets/vt-hotmath-legacy/hotmath_help/spanish/topics/graphing-tangent-function/tan-graph.gif



Propiedades o características de la función tangente:

- Es periódica, de periodo π, ya que tag x = tag($\pi + x$). Repite los valores cada intervalo de π radianes
- Es impar, es decir, es simétrica respecto al origen de coordenadas
- Los ceros se determinan haciendo tag x = 0, cumpliéndose esto para x = nπ con n entero
- El domino está formado por R - $\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \pm\frac{9\pi}{2}, \ldots$ valores que anulan la función
- El rango de la función es todos los números reales
- No es in yectiva
- Es sobreyectiva
- No tiene máximos ni mínimos

VÍDEOS DE REFERENCIA:

➢ https://www.youtube.com/watch?v=Dkdxks2ifBs
➢ https://www.youtube.com/watch?v=n6857q5hM5E
➢ https://www.youtube.com/watch?v=JwGW8YyNp4M
➢ https://www.youtube.com/watch?v=Dgpsd_CwZfs

- https://www.youtube.com/watch?v=-hlSqPei4G4

Actividad IV

1. Representa gráficamente la función y = sen x en el intervalo $-\pi, \pi$. Para ello ayúdate de una calculadora científica y una tabla de valores.
2. Teniendo en cuenta la gráfica de la función seno, representa las siguientes funciones:
   a) y = sen x – 2
3. Representa gráficamente las siguientes funciones:
   a) y = cos x + 1
4. Utiliza la calculadora para construir una tabla de valores que te permita representar, de forma precisa la función definida como y = tgx en el $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$
5. ¿En qué consiste un electrocardiograma?
6. Haz una lista de 10 fenómenos naturales que sean periódicos.

Unidad De Aprendizaje V (Números Complejos)

INTRODUCCIÓN: En el mundo de las matemáticas se utilizan diferentes grupos de números como son nos números naturales, los enteros, los racionales o los reales. Pero algunas ecuaciones algebraicas, concretamente las ecuaciones en las que hay que calcular las raíces cuadradas de números negativos es donde aparecen los números complejos, que nos ayudan a resolverlas. Si intentamos resolver la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$, nos encontramos que su solución está fuera del alcance de los números reales, es decir: $x = \pm \sqrt{-1}$. No existe un número real que elevado al cuadrado resulte igual a -1. El problema queda resuelto al definir un número cuyo valor sea $\sqrt{-1}$. Este número se simboliza por la letra i y se denomina unidad imaginaria.

$$\mathbf{i =} \sqrt{-1}$$

Podemos definir **Unidad imaginaria (i)** como aquel número que elevado al cuadrado es igual a – 1. Es decir: $\mathbf{i^2 = -1}$

Ejemplo: ¿Qué soluciones tiene la ecuación $x^2 + 36 = 0$?
Si $x^2 + 36 = 0$, entonces $x^2 = -36$ ➔ $x = \pm \sqrt{-36} = \pm \sqrt{36}.\sqrt{-1}$ ➔ $x = \pm 6i$. Por lo tanto las soluciones son $x_1 = +6i$ y $x_2 = -6i$.

- **NÚMERO COMPLEJO**: Una expresión de la forma **a + bi**, en la que **a** y **b** son números reales cualesquiera e **i** es la unidad imaginaria, se denomina número complejo, denotado:

$$\mathbf{Z} = a + bi$$

Esta expresión es llamada forma binómica o rectangular del número complejo, donde el número a representa la parte real y el numero b representa la parte imaginaria.

Son números complejos: $Z_1 = 3 - 5i$; $Z_2 = 4 - 2i$; $Z_3 = -5$; $Z_4 = -3i$; $Z_5 = -2 + 4i$

❖ POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA:

$i^0 = 1$	$i^5 = i^4.i = 1.i = i$
$i^1 = i$	$i^6 = i^4.i^2 = 1.(-1) = -1$
$i^2 = -1$	$i^7 = i^6.i = (-1).i = -i$
$i^3 = i^2.i = (-1).i = -i$	$i^8 = i^6.i^2 = (-1).(-1)$
$i^4 = i^2.i^2 = (-1).(-1) = 1$	

Se observa que los valores de las potencias de i se repiten periódicamente al aumentar el exponente en 4. Las cuatro primeras potencias de i son diferentes. Cada cuatro potencias sucesivas se repiten los valores 1, i, - 1, - i.

$i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots\ldots = i^{\text{multiplo de } 4} = 1$. Utilizando este proceso es fácil encontrar las potencias de i.

En general, para obtener una potencia de i, se divide el exponente de la letra i entre 4 y se usa como nuevo exponente el residuo de la división.

Ejemplo: Encontrar el valor de $\mathbf{i^{1236}}$

Como al dividir 1236 entre 4 se obtiene como residuo 0, se tiene:

$$\mathbf{i^{1236} = i^0 = 1}$$

Indagar sobre los números imaginarios puros y los números cuya parte imaginaria es cero

❖ **IGUALDAD DE NÚMEROS COMPLEJOS**: Dos números complejos son iguales sí, y solamente sí, tienen iguales sus partes reales e imaginarias. Si $\mathbf{Z_1} = a + bi$ y $\mathbf{Z_2} = c + di$ son dos números complejos, puede escribirse de acuerdo a la siguiente definición:

$$\mathbf{Z_1 = Z_2 \Longleftrightarrow a = c \text{ y } b = d}$$

Ejemplo: ¿Cuál debe ser el valor de k para que el numero complejo $3 + (\sqrt{3k} + 1)i$ sea un número real?

Solución: De acuerdo con la definición, para que un complejo sea un número real debe verificarse que la parte imaginaria; en este caso $\sqrt{3k} + 1$, sea igual a cero. Entonces:

$$\sqrt{3k} + 1 = 0 \Rightarrow \sqrt{3k} = -1 \Rightarrow (\sqrt{3k})^2 = (-1)^2 \Rightarrow 3k = 1 \Rightarrow \mathbf{k = 1/3}$$

Ejemplo: Dados dos números complejos $\mathbf{Z_1} = 2 + (m + 4)i$ y $\mathbf{Z_2} = (n - 3) + 2i$, hallar el valor de m y n para que $Z_1 = Z_2$.

Solución: Por definición, para que dos números complejos sean iguales, debe cumplirse que sus partes reales e imaginarias sean iguales.

Si $Z_1 = Z_2$, entonces, $2 + (m + 4)i = (n - 3) + 2i \Rightarrow n - 3 = 2$ y $m + 4 = 2$

De la primera ecuación se tiene $n - 3 = 2 \Rightarrow \mathbf{n = 5}$

De la segunda ecuación se tiene que $m + 4 = 2 \Rightarrow \mathbf{m = -2}$

Investigar sobre la representación gráfica de los números complejos con sus respectivos ejemplos

- **OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA**:

1. **Adición de números complejos**: La suma de dos números complejos en forma binómica, da como resultado otro número complejo cuya parte real es igual a la suma algebraica de las partes reales de los sumandos, mientras la parte imaginaria es igual a la suma algebraica de las partes imaginarias. La suma queda definida así:

$$\mathbf{Z_1 + Z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i}$$

Ejemplo: (- 7 + 5i) + (4 – 3i) = (- 7 + 4) + (5i – 3i) = **- 3 + 2i**

La suma de dos números complejos conjugados Z =a + bi y Z = a – bi, es un número real.

$$\mathbf{(a + bi) + (a - bi) = 2a}$$

2. **Producto de dos números complejos**: El producto de dos números complejos Z_1 = a + bi y Z_2 = c + di, viene dado mediante la siguiente expresión:

$$\mathbf{Z_1.Z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i}$$

El producto de dos números complejos conjugados a + bi y a – bi, es un número real.

$$\mathbf{(a + bi).(a - bi) = a^2 + b^2}$$

3. **Cociente de dos números complejos**: Sean dos números complejos Z_1 = a + bi y Z_2 = c + di. Para dividirlos se multiplica el numerador y denominador por la conjugada del denominador. Es decir,

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd \ + \ bc-ad \ i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}$$

El inverso de un numero complejo, a + bi, puede ser calculado utilizando el procedimiento empleado para calcular el cociente de dos números complejos.

VÍDEOS DE REFERENCIA:

- https://www.youtube.com/watch?v=Qv_bvmJJfV0&list=PLeySRPnY35dHfzYRb8StWkxnVTkrocv6X

Actividad V

1. Calcula las raíces cuadradas de los siguientes números:

a) $\overline{-81}$ b) $\overline{-25}$ c) $\overline{-\frac{1}{4}}$ d) $\overline{-\frac{1}{2}}$ e) $\overline{-7}$

2. Resolver en el conjunto de los números complejos las siguientes ecuaciones:

   a) $x^2 + 8x + 25 = 0$ b) $x^2 - 2x + 5 = 0$ c) $x^2 + 16 = 0$
3. Expresar en forma binómica el numero complejo resultado de las siguientes operaciones:
   a) $1 + \sqrt{-16}$ b) $6 - 8\sqrt{-4}$ c) $\sqrt{20} + \sqrt{-18}$ d) $54 + \sqrt{-162}$
4. Encontrar el valor de cada una de las siguientes potencias:
   a) i^{23} b) i^{78} c) i^{329} d) i^{1224} e) i^{3727} d) $(-i)^{127}$
5. Hallar el valor de p para que los números complejos $Z_1 = 3 + 5i$ y $Z_2 = 3 + (p - 2)i$ sean iguales.
6. Se dan los siguientes complejos: $Z_1 = 3 - 2i$ y $Z_2 = 4 + i$. Calcular:
   a) $Z_1 + Z_2$ b) $Z_1.Z_2$ c) Z_1/Z_2 d) $1/Z_1$ e) $1/Z_2$ f) $Z_1.Z_2$

7. Dados los números $\mathbf{Z_1} = \frac{1}{2} + 2i$; $\mathbf{Z_2} = 3 + \frac{1}{2}i$; $\mathbf{Z_3} = -2 + 4i$. Calcular:
   a) $\mathbf{Z_1 + Z_2 - Z_3}$ b) $\mathbf{Z_3 - Z_2 + Z_1}$
8. Hallar el numero k que verifica la siguiente igualdad: $(1 + 3i).(k + 2i) = 13 + 59i$.

PLAN DE EVALUACIÓN

UNIDAD DE APRENDIZAJE	**ESTRATEGIA EVALUATIVA**	**PONDERACIÓN**	**FECHA DE ENTREGA**
Identidades del ángulo doble	Resolver la actividad I y enviarla al correo	**4 pts.**	**30-04-2020**
Ley del seno y ley del coseno	Micro clase N°1 de la actividad II y III	**4 pts.**	**14-05-2020**
Representación gráfica de las funciones trigonométricas	Resolver la actividad IV y enviarla al correo	**4 pts.**	**26-05-2020**
Números complejos	Micro Clases N°2 de la actividad V	**4 pts.**	**04-05-2020**
	Responsabilidad y puntualidad	**2 pts.**	**Durante todo el lapso**
	Claridad y visión tanto de las imágenes como la del video	**2 pts.**	**En cada asignación durante todo el lapso**

Micro clase N°1: Realizar un vídeo donde el alumno defina la ley del seno, la ley del coseno, mencione algunas situaciones donde se aplican en la vida cotidiana y explique detalladamente dos ejercicios, uno donde se aplique la ley de los senos y el otro aplicando la ley del coseno.

Micro clase N°2: Realizar un vídeo donde el alumno defina números complejos, explique su importancia y explique cuatro ejercicios de la actividad V correspondientes a diferentes preguntas (por ejemplo: un ejercicio de la pregunta 2, otro de la pregunta 3 y así sucesivamente).